

11.1. Докажите, что для любых неотрицательных чисел x и y справедливо неравенство: $2^x x + 2^y y \geq 2^y x + 2^x y$.

11.2. На доске записаны натуральные числа от $1, 2, \dots, n$, где n делится на 50. Незнайка утверждает, что если стереть с доски все числа, которые делятся на 50, то сумма оставшихся чисел является квадратом некоторого натурального числа. Прав ли Незнайка?

11.3. Линейные углы при вершине тетраэдра прямые. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер равны.

11.4. Докажите, что в десятичной записи числа 2023^6 есть 3 одинаковые цифры.

11.5. В зале находится 400 людей. Каждый присутствующий улыбнулся двумстам из них. Каково минимальное количество пар людей, улыбнувшихся друг другу?

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 11.1

ЛИСТ 1 ИЗ 6

11-03

ШИФР УЧАСТНИКА

11.1

35

По условию ~~и~~ $x \geq 0, y \geq 0$.

$$2^x \cdot x + 2^y y \geq 2^y x + 2^x y$$

$$2^x \cdot x - 2^x y - 2^y x + 2^y y \geq 0$$

$$(x-y)2^x - (x-y)2^y \geq 0$$

$$(x-y)(2^x - 2^y) \geq 0$$

Заметим, что выражение $2^x - 2^y$ будет иметь такой же знак, как и выражение $x - y$. (т.к. $x, y \geq 0$)

$(x-y) \cdot (x-y) \geq 0$ - замечаем в неравенстве $(2^x - 2^y)$ на $(x-y)$.

$(x-y)^2 \geq 0$ - верно при любых x и y .

и т.д.

35

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 11.2

ЛИСТ 2 ИЗ 6

11-03

ШИФР УЧАСТНИКА

11.2

По условию $n : 50$.

Найдём сумму чисел от 1 до n : $S_1 = \frac{(1+n)n}{2}$

Заметим, что всего будет $\frac{n}{50}$ чисел, которые делятся на 50

Найдём сумму чисел, которые делятся на 50: $S_2 = \frac{50+n}{2} \cdot \left(\frac{n}{50}\right)$

Искомая сумма равна $S = S_1 - S_2$

По условию $n \in \mathbb{N}$, $n : 50$, следовательно $\frac{4n}{10} \in \mathbb{N}$, и $\frac{49n^2}{100}$

является квадратом натурального числа.

Ответ: Да, $S = \left(\frac{4n}{10}\right)^2$

05

45

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 11.3

ЛИСТ 3 ИЗ 6

11-03

ШИФР УЧАСТНИКА

11.3 0.5

Пусть S - вершина тетраэдра с прямыми углами.

По условию $\angle ASC = 90^\circ$

$\angle CSB = 90^\circ$

$\angle ASB = 90^\circ$

Пусть M, N, K, T, E, F середины сторон

AS, BS, AC, BC, AB и CS соответственно.

NT - средняя линия $\triangle CSB$

$NT \parallel CS, NT = \frac{1}{2} CS$

$\angle CSB = 90^\circ, \angle ASC = 90^\circ \Rightarrow CS \perp ASB \Rightarrow NT \perp ASB$

~~$NT \perp ASB$~~

MN - средняя линия $\triangle ABS \Rightarrow MN \parallel AB, MN = \frac{1}{2} AB$

$MN \in ABS \Rightarrow MN \perp NT \Rightarrow MT^2 = MN^2 + NT^2 = \frac{AB^2 + CS^2}{4}$ (по теореме Пифагора)

KM - средняя линия $\triangle ACS \Rightarrow KM \parallel CS, KM = \frac{1}{2} CS$

$KM \parallel CS \Rightarrow KM \perp ASB \Rightarrow KM \perp MN \Rightarrow KN^2 = KM^2 + MN^2 = \frac{CS^2 + AB^2}{4}$ (по теореме Пифагора)

$MT^2 = KN^2 \Rightarrow MT = KN$

$AE = EB \Rightarrow SE$ - медиана. Так как $\triangle ASB$ - прямоугольный, а SE - медиана

из прямого угла, то $SE = \frac{1}{2} AB = AE = EB, FS = \frac{1}{2} CS$

$CS \perp ASB \Rightarrow FS \perp ASB, SE \in ASB \Rightarrow FS \perp SE$

$FE^2 = FS^2 + SE^2 = \frac{CS^2 + AB^2}{4}, FE^2 = KN^2 \Rightarrow FE = KN = MT$

т.е.

МД

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 11.4

ЛИСТ 4 ИЗ 6

11-03

ШИФР УЧАСТНИКА

11.4

Заметим, что число 2023^6 в конце имеет нуль цифр, что и число $3^6 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 81 \cdot 9 = 729$. Но есть число 2023^6 оканчивается на 9. Также заметим, что оно не может начинаться на 0.

$$2023 > 2000 \Rightarrow 2023^6 > 2000^6 = (2 \cdot 10^3)^6 = 2^6 \cdot 10^{18} = 64 \cdot 10^{18}$$

Заметим, что число $64 \cdot 10^{18}$ в десятичной записи имеет 20 цифр. Следовательно, число 2023^6 будет иметь столько же либо больше цифр.

Заметим, что если первая цифра числа 2023^6 ~~меньше~~ ^{меньше} 6, то оно больше или равно $10^{18} \cdot 100 = 10^{20}$ (т.к. $2023 > 2000$, а $2000^6 = 64 \cdot 10^{18}$), но есть оно будет иметь ~~не~~ минимум 21 цифру в записи и 3 из них точно будут одинаковыми, т.к. всего существует 10 цифр, и $21 = 10 + 10 + 1$.

~~Если первая цифра больше 6, то оно больше или равно $10^{18} \cdot 100 = 10^{20}$ (т.к. $2023 > 2000$, а $2000^6 = 64 \cdot 10^{18}$), но есть оно будет иметь минимум 21 цифру в записи и 3 из них точно будут одинаковыми, т.к. всего существует 10 цифр, и $21 = 10 + 10 + 1$.~~

Последние 3 цифры числа 2023^6 будут совпадать с

последними тремя цифрами числа 23^6 (т.к. $(2023 \cdot 100)^6 = 23^6 \cdot 100^6$).

$$23^6 = (23^3)^2 = (529)^2$$

$$\begin{array}{r} \times 529 \\ \times 529 \\ \hline \dots 461 \\ + \dots 58 \\ \hline \dots 841 \end{array}$$

...841 — достаточно считать 3 последние цифры при умножении

$$\begin{array}{r} \times 841 \\ \times 529 \\ \hline + \dots 569 \\ + \dots 82 \\ \hline \dots 5 \end{array}$$

...889 — 3 последние цифры числа 2023^6

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 11.4

ЛИСТ 5 ИЗ 6

11-03

ШИФР УЧАСТНИКА

Докажем, что $2023^6 < 69 \cdot 10^{18}$

$$69 > 4,1^3$$

$$2023^2 = 2023 \cdot 2023 = 4092529$$

$$\sqrt[3]{2023^6} < \sqrt[3]{69 \cdot 10^{18}}$$

$$2023^2 = 4092529 < \sqrt[3]{69 \cdot 10^{18}} > 4,1 \cdot 10^6 = 4100000$$

П.к. $4092529 < 4100000$, то $2023^6 < 69 \cdot 10^{18}$.

Докажем, что $2023^6 > 68 \cdot 10^{18}$

$$68 < 4,08^3$$

$$\sqrt[3]{2023^6} > \sqrt[3]{68 \cdot 10^{18}}$$

$$4092529 > \sqrt[3]{68 \cdot 10^{18}} < 4080000$$

П.к. $4092529 > 4080000$, то $2023^6 > 68 \cdot 10^{18}$

$68 \cdot 10^{18} < 2023^6 < 69 \cdot 10^{18}$, следовательно первые 2 цифры числа

2023^6 это 648.

Число 2023^6 начинается на 68 и заканчивается на 889, следовательно в его десятичной записи есть 3 одинаковые цифры.

75

ЛИСТ ДЛЯ ОТВЕТОВ

ЗАДАНИЕ № 11.5

ЛИСТ 6 ИЗ 6

11-03

ШИФР УЧАСТНИКА

11.5

35

Дадим каждому человеку в зале номер; первый будет a_1 , второй a_2 , третий a_3 , ... и ~~400-й~~ 400-й a_{400} .

Пусть первый человек первый улыбнулся двумстам другим людям. Не считая его, в зале $400 - 1 = 399$ человек. После того, как первый закончил улыбаться, в зале осталось 200 человек, которыми первый улыбнулся. Рассмотрим действия людей,

которые улыбнулись первому. Заметим, что наша цель - сократить количество пар. ~~Рассмотрим~~ ~~в зале~~ ~~людей~~ Рассмотрим a_i человека, которому улыбнулся первый. Не считая ~~него~~ в зале 399 человек. Не учитывая первого, в зале осталось 398 человек (много улыбнулся человеку в ответ). Он улыбнулся двумстам людям, и осталось 198 человек, которыми a_i человек не улыбнулся. Сократив людей парами образам, будем получать 199, 198, 197, ..., 2, 1. И в конце получим, что останется один a_i человек, которому улыбнулся каждый другой человек в зале. При этом до того как a_i человек улыбнется, в зале не найдется ни одной пары людей, улыбнувшихся друг другу.

Человеку a_i необходимо улыбнуться 200 раз, и т.к. ему улыбнулись все остальные люди, то от вне зависимости от выбора создаст 200 пар.

Пример такого распределения: a_1 улыбнулся $a_2 - a_{201}$, a_2 улыбнулся $a_3 - a_{202}$, ..., a_{399} улыбнулся a_{400} и $a_1 - a_{199}$, и последним остался a_{400} ~~которому~~

Ответ: 200 пар.

45